

〈論文〉

〈Paper〉

## 有限な大局次元を持つ単列環の長さと 大局次元の上限の関係について

On the Relation of the Upper Bound of the Global Dimension and  
the Length of Serial Algebra which has Finite Global Dimension

植 松 盛 夫

UEMATSU Morio

上武大学経営情報学部, 〒370-1393 群馬県高崎市新町270-1

*Faculty of Management Information Sciences, Jobu University, Takasaki, Gunma, 370-1393, Japan*

受付 2008年1月8日 改訂 2008年2月1日

Received 8 January 2008, Revised 1 February 2008

## 抄録

$A$  を代数閉体上有限次元の単列環とし、 $n$  を  $A$  の非同系な左単純加群の個数とする。

$A$  が I 型の単列環で、 $\ell$  ( $2 \leq \ell \leq n$ ) を  $A$  の長さとするとき、大局次元は  $n - \ell + 1$  以下である。

$A$  が II 型の単列環で有限の大局次元を持ち長さ  $n + t$  ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) であるとき、大局次元は  $2n - 2t$  である。

キーワード：大局次元、単列環、アドミッシブル列、組成列の長さ

## Abstract

Let  $A$  be the finite dimensional basic connected serial algebra over an algebraically closed field, and  $n$  is the number of the non isomorphic simple left modules of  $A$ .

If  $A$  is the first type of serial algebra and  $\ell$  ( $2 \leq \ell \leq n$ ) is the length of  $A$ , then  $gl.dim A \leq n - \ell + 1$ .

If  $A$  is the second type of serial algebra of finite global dimension and  $n + t$  ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) is the length of  $A$ , then  $gl.dim A \leq 2n - 2t$ .

*key words and phrases* : global dimension ; serial algebra ; admissible sequence ; compositon length

# 有限な大局次元を持つ単列環の長さ 大局次元の上限の関係について

植 松 盛 夫

はじめに

多元環 (algebra) の大局次元 (global dimension) は、加群のカテゴリーを研究する際に役立つものであるが、多元環の有向グラフの点の個数 (非同型な左単純加群の個数)  $n$  と大局次元の関連についての研究は特別な環によるものがいくつかあるのみで、一般にはあまり知られていない。

Gustafson (1985) は、単列環の大局次元が有限ならばそれが  $2n-2$  で抑えられることと、環の長さが  $2n-1$  で抑えられることを証明した。筆者 (2004) はこの結果を拡張し、左単列環のケースについて同様の結果を得た。しかしながら、大局次元と環の長さの関連については先行研究があまりなく、本稿ではこの方面の成果として次の2点を証明する。

$A$  を代数閉体  $k$  上有限次元の単列環で有限の大局次元を持つとし、 $n$  を  $A$  の非同系な左単純加群の個数とする。

- (1) 長さ  $\ell$  ( $2 \leq \ell \leq n$ ) のⅠ型の単列環  $A$  の大局次元は  $n - \ell + 1$  以下である。
- (2) 長さ  $n+t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) のⅡ型の単列環  $A$  の大局次元は  $2n-2t$  以下である。

## 1. 有向グラフと多元環

体  $k$  上の多元環は、有向グラフ (Quiver) とその関係 (relation) によって記述できる。

有向グラフ  $Q = (Q_0, Q_1)$  は、有限個の点の集合  $Q_0$  と矢の集合  $Q_1$ 、および関数  $s: Q_1 \rightarrow Q_0, e: Q_1 \rightarrow Q_0$  からなる。 $\alpha \in Q_1$  に対して  $s(\alpha) = i, e(\alpha) = j$  となるとき、 $\alpha$  を点  $i$  から点  $j$  への矢と呼び、 $\alpha: i \rightarrow j$  とかく。

有向グラフ  $Q$  の小道 (path) とは、矢の順序列  $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$  で  $1 \leq t \leq n-1$  に対して  $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$  を満たすものをいい、 $n$  をその小道の長さという。小道  $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$  に対して、 $s(p) = s(\alpha_1), e(p) = e(\alpha_n)$  と定める。特に点  $i \in Q_0$  に対して  $e_i$  を長さ0の小道としてその仲間に入れる。ただし、 $s(e_i) = e(e_i) = i$  と定義する。長さ  $n > 0$  の小道  $p$  で始点と終点が同じ点であるもの、すなわち  $s(p) = e(p)$  となるものを有向サイクル (oriented cycle) と呼ぶ。

有向グラフ  $Q$  が与えられたとき、体  $k$  上の  $Q$  の小道多元環 (path algebra)  $kQ$  を  $Q$  の小

道を基底とするベクトル空間として定義する。ただし、基底である小道同士の積は、 $p = \alpha_n \cdots \alpha_1, q = \beta_m \cdots \beta_1$  に対して、

$$pq = \begin{cases} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_m \cdots \beta_1 & \text{if } s(\alpha_1) = e(\beta_m) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とし、特に長さ0の小道  $e_i$  との積を、

$$pe_i = \begin{cases} p & \text{if } s(p) = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad e_i p = \begin{cases} p & \text{if } e(p) = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする。

例1

$Q$  を図1のように1つの点と1つの矢からなる有向グラフとする。

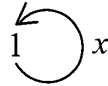


図1

このとき、 $kQ$  は1変数多項式環  $k[x]$  と同型である。

例2

$Q$  を次の有向グラフとする。

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

このとき、 $kQ$  は下半三角行列

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & k & k \end{bmatrix}$$

と同型である。

小道多元環  $kQ$  上の関係 (relation) とは、 $kQ^+$  を  $Q$  のすべての矢からなるイデアル、 $(kQ^+)^n$  を長さが  $n$  以上のすべての小道からなるイデアルとすると、ある  $n \geq 2$  について  $(kQ^+)^n \subset I \subset (kQ^+)^2$  なるイデアル  $I$  の生成元のことである。

例3

$Q$  は例1と同じ図1の有向グラフとする。 $I$  を  $x^n$  で生成されたイデアルとする。このことを、 $Q$  に  $x^n = 0$  という関係を入れるという。このとき、 $kQ/I = k[x]/x^n$  である。

## 定理4 (Gabriel, P)

代数的閉体  $k$  上の基本的 (basic) 有限次元  $k$  多元環は、 $kQ/I$  という形で表される。ここで、 $Q$  は一意的に定まる有向グラフで  $I$  は  $(kQ^+)^n \subset I \subset (kQ^+)^2$  を満たすイデアルである。

## 注意5

代数的閉体  $k$  上の有限次元  $k$  多元環  $A$  は、 $A/\text{rad}A \cong k \times \cdots \times k$  となるとき基本的 (basic) であるという。ここで、 $\text{rad}A$  は  $A$  の根基 (radical) である。任意の有限次元  $k$  多元環は、基本的多元環に森田同値であるため、環の加群のカテゴリーを研究する目的ならば初めから環は基本的であることを仮定しても一般性を失わない。

## 2. 単列環とアドミッシブル列

加群  $M$  は、その部分加群全体が包含関係で全順序をなすとき単列 (uni serial) であるという。多元環  $A$  は、直既約な射影加群と入射加群がすべて単列であるとき単列環 (serial algebra) であるという。例2及び例3の環は単列環である。

単列環を表現する有向グラフは、次のようになる。

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n$$

図2 I型の単列環の有向グラフ

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n$$

図3 II型の単列環の有向グラフ (有向サイクルを1つ持つ)

単列環  $A$  は、 $Q$  を図2または図3の有向グラフとし、 $I$  を  $(kQ^+)^n \subset I \subset (kQ^+)^2$  なるイデアルとすると、 $A = kQ/I$  と表される。 $Q$  が図2のとき  $A$  はI型の単列環、図3のときII型の単列環と呼ばれる。以下断りのない限り、単列環の有向グラフの点の個数は図2および図3のように  $n$  とする。

$A = kQ/I$  を単列環とし、 $Q$  を図2または図3の有向グラフとする。点  $i$  に対応する単純加群 (simple module) を  $S_i$ 、直既約射影加群 (indecomposable projective module) を  $P_i$  とする。なお、すべて左加群で考える。このとき、 $1 \leq j \leq n-1$  に対して  $P_{j+1}$  は、 $\text{rad}P_j$  の射影被覆 (projective cover) となる。 $P_n$  が単純加群でないときは、更に  $P_1$  が  $\text{rad}P_n$  の射影被覆となる。このことから、 $1 \leq j \leq n$  に対して直既約射影加群  $P_j$  の組成列の長さを  $a_j = \ell(P_j)$  とおくと、自然数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  は次の (1) または、(2) の条件を満たす。

$$a_{j+1} \geq a_j - 1 \geq 1 \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad a_n = 1 \quad (1)$$

$$a_{j+1} \geq a_j - 1 \geq 1 \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad a_n > 1, \quad a_1 \geq a_n - 1 \quad (2)$$

$A$  が I 型の単列環ならば (1) の条件を、II 型ならば (2) の条件を満たす。このいずれかの条件を満たす自然数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  をアドミッシブル列 (admissible sequence) という。

#### 例6

次はすべてアドミッシブル列である。

$$(4, 3, 2, 1), (5, 5, 5, 5), (2, 5, 4, 3), (3, 5, 4, 5, 4), (2, 4, 3, 2, 1)$$

#### 例7

$(5, 4, 2, 2)$  は、3番目の数2が2番目の数4よりも2少ないから、 $2 < 4 - 1$  となり条件を満たさないためアドミッシブル列ではない。アドミッシブル列であるためには、右端を除きそれぞれ2以上であって、右隣の数が小さくなる場合には1だけ小さくなるようなものである。右端の数が1でない場合は、左端の数が右端の数以上か1だけ小さいことが必要である。

#### 定理8 (Auslander, M)

任意のアドミッシブル列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  に対してこれをアドミッシブル列として持つ単列環が存在する。

#### 【証明】

与えられたアドミッシブル列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  に対して、 $a_n = 1$  ならば図2の有向グラフを、 $a_n > 1$  ならば図3の有向グラフを  $Q$  とおき、 $1 \leq j \leq n-1$  に対して  $\alpha_j$  を矢  $j \rightarrow j+1$  とする。 $a_n > 1$  の場合には、さらに  $\alpha_n$  を矢  $n \rightarrow 1$  とする。 $Q$  の各点  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して  $s(p_i) = 1$  となり長さが  $a_i - 1$  の小道  $p_i = \alpha_{i+a_i-1} \cdots \alpha_i$  (添字は  $n$  を超えた場合には  $n$  を必要な回数だけ減じて  $n$  以下となるようにする) に対して、関係  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$  によって生成されるイデアルを  $I$  とするとき、多元環  $A = kQ/I$  が求める単列環である。

#### 例9

$n$  次元下半三角行列

$$\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ k & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k & k & \cdots & k \end{bmatrix}$$

は、アドミッシブル列  $(n, n-1, \dots, 1)$  を持つ I 型の単列環である。

### 3. 単列環の大局次元

多元環  $A$  上の有限次元直既約左加群  $M$  の射影次元が  $d$  ( $\text{proj.dim } M = d$  と表す) であるとは、長さ  $d$  の最小射影列 (minimal projective resolution)

$$0 \rightarrow P_d \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が存在することである。無限に続く射影列しか存在しない場合は、射影次元が無限大であるといい、 $\text{proj.dim } M = \infty$  と表す。多元環  $A$  の大局次元が  $d$  である ( $\text{gl.dim } A = d$  と表す) とは、 $A$  上の有限次元直既約左加群の射影次元の最大値が  $d$  となることである。大局次元を計算するのには、すべての有限次元直既約左加群の射影次元を計算する代わりに単純加群の射影次元の最大値を求めればよい (Auslander, M)。

単列環の大局次元の計算方法を記述するための記号を次の例により導入する。

例10

アドミッシブル列  $(5, 4, 3, 4, 4)$  を持つ単列環を  $A$  とおく。 $A$  の有向グラフとその関係は次のようになる。

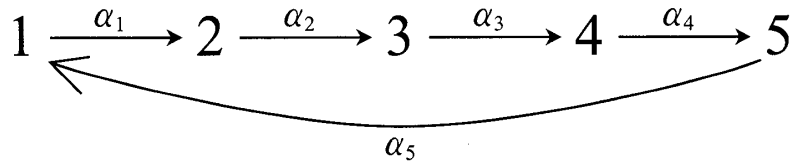


図4

関係：  $\alpha_5 \alpha_4 \alpha_3 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_5 \alpha_4 = \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_5 = 0$

このとき、 $i = 1, 2, 3, 4, 5$  に対して  $S_i = [i]$  と各単純加群を対応する番号で表現し、各直既約射影加群を次のように組成列を書き並べることで表現する。数字は対応する単純加群を意味する。

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

次に単純加群の最小射影列を計算する。

$S_1 = [1]$ の最小射影列：

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow [1] \rightarrow 0$$

$S_2 = [2]$ の最小射影列：

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow [2] \rightarrow 0$$

$S_3 = [3]$ の最小射影列：

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow [3] \rightarrow 0$$

$S_4 = [4]$ の最小射影列：

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow [4] \rightarrow 0$$

$S_5 = [5]$ の最小射影列：

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow [5] \rightarrow 0$$



したがって、

$$\text{proj.dim } S_1 = \text{proj.dim } S_2 = 1, \text{proj.dim } S_3 = 3, \text{proj.dim } S_4 = 5, \text{proj.dim } S_5 = 4$$

となり、それらの最大値が5であることから、 $A$  の大局次元は5となる。

計算に使われる最小射影列は次のように図式化できる。

$S_4 = [4]$  の最小射影列：

4	4
5	5
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

図5

図5のように  $S_4$  を表すタイルから始めて、左右の数が合うように  $P_i (i=1,2,3,4,5)$  を表すタイルを並べて行き、下端が揃ったときの使った  $P_i (i=1,2,3,4,5)$  タイルの個数から1を減じたものが射影次元となる。ここでタイルの中にある数字の個数をタイルの大きさと呼ぶことにする。

#### 4. 単列環の大局次元 と 長さ の 関係

##### (1) I 型の単列環の大局次元

$A$  を図2の有向グラフによる I 型の単列環とすると、 $gl.\dim A \leq n-1$  であり、 $\ell(A)=n$  である。ここで、 $A$  の長さ  $\ell(A)$  は、直既約射影加群の組成列の長さの最大値として定義する。一般に  $A$  をそのグラフが有向サイクルを含まない多元環とすると、 $gl.\dim A \leq n-1$  である。

## 例11

$A$  をアドミッシブル列  $(2, 2, \dots, 2, 1)$  を持つ単列環とすれば、 $gl.\dim A = n - 1$  である。実際  $S_1$  の最小射影列は次のようになり、これが最大の長さである。

$$0 \rightarrow [n] \rightarrow \begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow [1] \rightarrow 0$$

## 例12

$A$  をアドミッシブル列  $(n, n-1, \dots, 2, 1)$  を持つ単列環とすれば、 $\ell(A) = n$  で  $gl.\dim A = 1$  である。

これらよく知られた結果の一般化を考える。

## 定理13

$A$  を図2の有向グラフによる I 型の単列環で、 $\ell(A) = \ell$  (ただし、 $2 \leq \ell \leq n$ ) とするとき、 $gl.\dim A \leq n - \ell + 1$  である。

## 【証明】

まず、等号が実際に成立する例を述べる。

アドミッシブル列  $(\ell, \ell-1, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$  を持つ単列環を  $A$  とする。アドミッシブル列の  $\ell-1$  番目から  $n-1$  番目まで  $n-\ell+1$  個の2が並んだものである。 $S_{\ell-1}$  の最小射影列は次のようになり、これが最大であるから、 $gl.\dim A = n - \ell + 1$  である。

$$0 \rightarrow [n] \rightarrow \begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} \ell \\ \ell+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \ell-1 \\ \ell \end{bmatrix} \rightarrow [\ell-1] \rightarrow 0$$

次に、この値を超えることがないことを示す。

一般に、アドミッシブル列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を持つ I 型の単列環  $A$  において (I 型であるので  $a_n = 1$  である)、 $P_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) の組成列は次のようになっている。

$$P_i = \begin{bmatrix} i \\ i+1 \\ \vdots \\ i+a_i-1 \end{bmatrix}$$

点の集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  から  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$  への関数  $f$  を  $f(i) = i + a_i$  により定義する。 $1 \leq i \leq n$  について、 $f^h(i) = n+1$  となる最小の正の整数  $h$  を点  $i$  の距離と呼び、 $h(i)$  と書く。このとき、 $S_i$  の最小射影列は次のようになる (Gustafson)。

$$\cdots \rightarrow P_{f^2(i)} \rightarrow P_{f(i)} \rightarrow P_{f(i)} \rightarrow P_{f(i)} \rightarrow P_{i+1} \rightarrow P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$$

したがって、射影列の長さは、 $h(i) + h(i+1) - 1$  以下である。 $\ell = 2$  の場合は実際にこのケースが起こり、 $h(1) + h(2) - 1 = n - 1$  が大局次元の最大値となる。 $\ell > 2$  の場合では、点  $i$  の距離  $h(i)$  を大きくするためには、 $P_i$  の長さを短くすることになるが、アドミッシブル列の中に  $\ell, \ell - 1, \dots$  など1ずつ減らして2に至る部分が  $\ell - 2$  箇所必要であり、ここで射影列が途切れてしまう。この部分を開始部分または終端部分に付与するやり方、すなわちアドミッシブル列  $(\ell, \ell - 1, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$  および  $(2, \dots, 2, \ell, \ell - 1, \dots, 3, 2, 1)$  が射影列を最大にし、このとき  $gl.\dim A \leq n - \ell + 1$  である。

## (2) II 型の単列環の大局次元

II 型の単列環では、大局次元が無限大になることが起こりうる。

### 例14

$s > 1$  とするとき、アドミッシブル列  $(s, s, \dots, s)$  を持つ単列環を  $A$  とすると、 $gl.\dim A = \infty$  である。

#### 【証明】

例10で見たように、 $S_i$  の射影次元が有限であるためには、大きさ1のタイルが1つだけ敷かれている状態で、大きさ  $s > 1$  のタイルのみを用いて下端を揃えなければならない。これは不可能である。

Gustafson (1985) は、単列環で大局次元が有限のとき、その値および環の長さの上限を求めた。同時に、それら上限となる環の例を上げた。

#### 定理15 (Gustafson)

大局次元が有限の単列環  $A$  に対して、 $gl.\dim A \leq 2n - 2, \ell(A) \leq 2n - 1$  である。

### 例16 (Gustafson)

アドミッシブル列  $(n + 1, n + 1, \dots, n + 1, n)$  を持つ単列環の大局次元は  $2n - 2$  である。実際次のように  $proj.\dim S_n = 2n - 2$  となり、これが最大の射影次元である。

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} n \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n-1 \\ n \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} \rightarrow [n] \rightarrow 0$$

$2n-2$  は、単列環の大局次元の最大値である。

例17 (Gustafson)

アドミッシブル列  $(2n-1, 2n-2, \dots, n+1, n)$  を持つ単列環の大局次元は2である。このとき、この環の長さは  $2n-1$  となるが、この値は有限の大局次元を持つ単列環の長さの最大値である。

定理15の一般化を考える。例16、例17によれば、長さを大きくすると大局次元が小さくなるように見える。環の長さと大局次元の計算のため、Gustafson (1985) が導入した  $f$ -正規点 ( $f$ -regular points) を用いる。有限個の点の集合  $U = \{1, 2, \dots, n\}$  上の関数  $f$  について、 $X$  をある正の整数  $t$  に対して  $f^t(i) = i$  となる  $i \in U$  からなる  $U$  の部分集合とする。このとき、任意の  $i \in U$  に対して  $f^{n-1}(i) \in X$  となるので  $X$  は空でなく、 $f$  の定義域を  $X$  に制限したものは置換をなす。与えられたアドミッシブル列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  に対して、 $f(i) = i + a_i$  とおく。ただし、 $i + a_i$  が  $n$  を超えるときは、必要なだけ  $n$  を減じて  $1 \leq f(i) \leq n$  となるようにする。このとき上記で定義した集合  $X$  の要素を  $f$ -正規点と呼ぶ。前述したように  $S_i$  の最小射影列は次のようになる。

$$\cdots \rightarrow P_{f^2(i+1)} \rightarrow P_{f^2(i)} \rightarrow P_{f(i+1)} \rightarrow P_{f(i)} \rightarrow P_{i+1} \rightarrow P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$$

$S_i$  の射影次元が有限ならば、この列は次のような左端となっているはずである。

$$0 \rightarrow P_{f^k(i)} \rightarrow P_{f^{k-1}(i+1)} \rightarrow \cdots$$

$$0 \rightarrow P_{f^k(i+1)} \rightarrow P_{f^k(i)} \rightarrow \cdots$$

したがって、 $f^{k+1}(i) = f^{k+1}(i+1)$  または  $f^{k+1}(i) = f^k(i+1)$  である。

$f^h(i)$  が  $f$ -正規点となる最小の正の整数  $h$  を点  $i$  の距離と呼び、 $h(i)$  と書く。 $d$  を  $h(i)$  の最大値とすれば、 $\text{proj. dim } S_i \leq 2d$  となる。

$\text{gl. dim } A < \infty$  ならば、 $f$ -正規点に対応する直既約射影加群の間の写像は0または同型である。なぜならば、 $i, j$  を  $f$ -正規点とし、 $P_i \rightarrow P_j$  を0でない非同型な写像とすると、

$$\cdots \rightarrow P_{f^2(i)} \rightarrow P_{f^2(j)} \rightarrow P_{f(i)} \rightarrow P_{f(j)} \rightarrow P_i \rightarrow P_j \rightarrow K \rightarrow 0$$

という  $P_i \rightarrow P_j$  の余核 (cokernel) となる加群  $K$  に対する射影列が存在し、 $f$  が  $f$ -正規点たちの置換となることから、この射影列は無限の長さとなるからである。

定理18

$A$  をアドミッシブル列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を持つ II 型の単列環で、 $\ell(A) = n + t$  (ただし、 $1 \leq t \leq n - 1$ ) とするとき、 $gl.\dim A < \infty$  ならば  $gl.\dim A \leq 2n - 2t$  である。

【証明】

$f$ -正規点は1点のみである。もし、2点以上あれば、 $\ell(A) = n + t$  より、それらの点に対応する直既約加群の間に0でない射影が存在し、 $gl.\dim A = \infty$  となってしまう。

$f$ -正規点が点  $n$  であるとしても一般性を失わない。このとき、 $a_n = n$  である。もし、 $a_n > n$  ならば、 $P_n$  から自分自身への0でない非同型な写像が存在し、 $gl.\dim A = \infty$  となる。また  $a_n < n$  ならば、 $f$ -正規点が複数となる。

$a_n = n$  と  $a_i = n + t$  となる  $i$  が存在することから、 $n + t, n + t - 1, \dots$  など1ずつ減らして  $n$  に至る部分が少なくとも  $t$  箇所必要である。このことにより、点  $i$  の距離  $h(i)$  の最大値は  $d = n - t$  となる。したがって、 $gl.\dim A \leq 2d = 2n - 2t$  である。

注意19

定理18において、 $t = 1$  とすれば  $gl.\dim A \leq 2n - 2$  となり、定理15の大局次元の上限となる。また、実際に  $gl.\dim A \leq 2n - 2$  となるときは  $\ell(A) = n + 1$  となる。

例20

定理17の等号が成立する例をあげる。 $A$  を次のアドミッシブル列を持つ単列環とする。

$$(n + t, n + t - 1, \dots, n + 1, n + 1, \dots, n + 1, n)$$

このとき、各点の距離は次のようになる。

$$h(1) = h(2) = \dots = h(t) = n - t, h(t + j) = n - t - j \ (1 \leq j \leq n - t - 1), h(n) = n$$

これにより、 $proj.\dim S_n = 2n - 2t$  となる。

この例は、 $t = 1$  なら例16、 $t = n - 1$  なら例17となり Gustafson の例の一般化である。

$\ell(A) \leq n$  で  $gl.\dim A < \infty$  なる単列環では、 $f$ -正規点が複数となる場合がある。

例21

$A$  をアドミッシブル列  $(4, 4, 4, 4, 3, 2, 2)$  を持つ単列環とする。このとき、 $f$ -正規点は  $\{1, 5\}$  の2点で、 $h(1) = 0, h(2) = 2, h(3) = 4, h(4) = 1, h(5) = 0, h(6) = 1, h(7) = 3$  となる。点  $i$  が  $f$  により点  $j$  に写されるとき、すなわち  $f(i) = j$  となるとき、 $i \rightarrow j$  と書くことにして有向グラフ ( $f$ -正規グラフと呼ぶ) を作ると次のようになる。

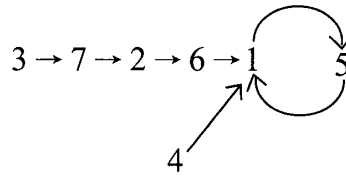


図6

このとき  $S_2$  の射影次元が7で、これが最大であるため、 $gl.\dim A = 7$ となる。実際、 $S_2 = [2]$  の最小射影列は次のようになる。

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow [2] \rightarrow 0$$

これは、

$$0 \rightarrow P_{f^3(3)} \rightarrow P_{f^3(2)} \rightarrow P_{f^2(3)} \rightarrow P_{f^2(2)} \rightarrow P_{f(3)} \rightarrow P_{f(2)} \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow S_2 \rightarrow 0$$

とも表現され、図6と比較して

$$f(2) = 6, f(3) = 7, f^2(2) = 1, f^2(3) = 2, f^3(2) = 5, f^3(3) = 6$$

となっていることがわかる。

$\ell(A) < n$  で  $gl.\dim A < \infty$  なる II 型の単列環の大局次元の上限については未計算であるが、 $\ell(A) = n$  のケースでは  $gl.\dim A \leq 2n - 3$  となることがわかった。

## 例22

$A$  をアドミッシブル列  $(n, n-1, n-1, \dots, n-1)$  を持つ単列環 (ただし、 $n < 2$ ) とする。 $f$ -正規グラフは、次のようになる。



図7

このとき、次のように  $proj.\dim S_{n-1} = 2n - 3$  となり、これが最大の射影次元である。

$$0 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow S_{n-1} \rightarrow 0$$

【参考文献】

1. Auslander, M., Reiten, I., and Smalø, S. O., *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Univ. Press, 1995
2. Deng, B., *A Construction of Algebras with Arbitrary Finite Global Dimensions*, Communications in algebra 26 (1998), pp. 2959
3. Gabriel, P., *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, Lecture Notes in Math., 831, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980)1-71
4. Gustafson, William H., *Global Dimension in Serial Rings*, J. Algebra 97 (1985), 14-16
5. Ringel, C. M., *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Math., 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1984)
6. Uematsu, M., *Global Dimension in Left Serial Algebras*, Proceedings of the 36th Symposium on Ring Theory and Representation Theory(2004), pp. 135-138