論文

有限な大局次元を持つサイクル型単列環の長さと大局次元の上限の関係について[1]

On the Relation of the Upper Bound of the Global Dimension and the Length of Serial Algebra of Cyclic Type Which Has Finite Global Dimension

植松盛夫
UEMATSU Morio

抄録

A を有限の大局次元を持つサイクル型の単列環で、その単純加群の個数を n とする。$k < n/2$ なる任意の自然数 k に対して環の長さ ℓ が n/k 以上の最小の整数であるとき、A の大局次元は $2n-2k-1$ 以下である。

キーワード

大局次元、単列環、アドミッシブル列、組成列の長さ

（受付　2012 年 2 月 14 日、オンライン公開　2012 年 12 月 17 日）

1. はじめに

多元環（algebra）の大局次元（global dimension）は、加群のカテゴリーを研究する際に役立つものであるが、多元環の有向グラフの点の個数 n（非同型な左単純加群の個数）と大局次元の関連についての研究は特別な環によるものがいくつかあるのみで、一般にはあまり知られていない。

Gustafson（1985）は、単列環（中山環）の大局次元が有限ならばそれが $2n-2$ で抑えられることを証明した。筆者（2008）はこの結果を一般化して、長さ $n+t$ $(1 \leq t \leq n-1)$ の単列環の大局次元は有限ならば $2n-2t$ 以下であることを示した。また、直線型（Ⅰ型）の単列環で、長さ $\ell(2 \leq \ell \leq n)$ のものの大局次元は有限ならば $n-\ell+1$ 以下であることも示した。しかしながら、長さ $\ell(2 \leq \ell \leq n)$ のサイクル型（Ⅱ型）の単列環の大局次元の上限については未解決のままであった。本稿ではこの点を明らかにし、次を証明する。

[1] この研究は平成 22 年度三俣記念研究費の助成により行われた。

$n \geq 2k+3$ で $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ のとき、長さ ℓ（$\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \ell < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$）のサイクル型の単列環の大局次元は有限ならば、$2n-2k-3$ 以下である。ここで、実数 x に対して x 以上の整数で最小のものを $\lceil x \rceil$ で表す。

2. 単列環とアドミッシブル列

k を代数的閉体とし、A を k 上有限次元な多元環（algebra）とする。このとき、A は、ある有向グラフ Q と、$(kQ^+)^t \subset I \subset (kQ^+)^2$ なるイデアル I により、$A = kQ/I$ と表される。ここで、kQ^+ は、Q のすべての矢からなるイデアル、$(kQ^+)^t$ は長さが t 以上のすべての小道からなるイデアルである。

加群 M は、その部分加群全体が包含関係で全順序をなすとき単列（uni serial）であるという。多元環 A は、直既約な射影加群と入射加群がすべて単列であるとき単列環（中山環、serial algebra）であるという。

$A = kQ/I$ を単列環とすると、Q は図 1 または図 2 となる。有向グラフが図 1 のとき A は直線型（Ⅰ型）の単列環、図 2 のときサイクル型（Ⅱ型）の単列環と呼ばれる。

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

図 1　直線型の単列環の有向グラフ

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

図 2　サイクル型の単列環の有向グラフ

以下 $A = kQ/I$ は単列環とし、Q を図 1 または図 2 の有向グラフとする。点 i に対応する単純加群（simple module）を S_i、直既約射影加群（indecomposable projective module）を P_i とする。なお、すべて左加群で考える。このとき、$1 \leq j \leq n-1$ に対して P_{j+1} は、$\mathrm{rad}P_j$ の射影被覆（projective cover）となる。P_n が単純加群でないときは、更に P_1 が $\mathrm{rad}P_n$ の射影被覆となる。このことから、$1 \leq j \leq n$ に対して直既約射影加群 P_j の組成列の長さを $a_j = \ell(P_j)$ とおくとき、自然数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は次の（1）または、(2) の条件を満たす。

$$a_{j+1} \geq a_j - 1 \geq 1 \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad a_n = 1 \tag{1}$$

$$a_{j+1} \geq a_j - 1 \geq 1 \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad a_n > 1, \quad a_1 \geq a_n - 1 \tag{2}$$

A が直線型の単列環ならば（1）の条件を、サイクル型ならば（2）の条件を満たす。このいずれかの条件を満たす自然数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ をアドミッシブル列（admissible sequence）という。逆に、（1）または（2）を満たす自然数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対してこれをアドミッシブル列として持つ単列環が存在する。

アドミッシブル列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を持つ単列環 A において各単純加群 S_i の組成列を $[i]$ のように対応する番号で表し、P_i の組成列を縦に書き並べることにすると、次のように表現される。

$$P_i = \begin{bmatrix} i \\ i+1 \\ \vdots \\ i+a_i-1 \end{bmatrix}$$

ただし、組成列中の単純加群を表すべき番号が n を超えるときは、必要なだけ n を減じて 1 から n に収まるようにする。

例 1

$A = kQ/I$ をアドミッシブル列 $(4,4,4,4,3,2,2)$ を持つ単列環とする。これはサイクル型で、対応する有向グラフ Q は次のようになる。

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\varepsilon"] & 6 \arrow[r, "\eta"] & 7 \arrow[llllll, bend left, "\theta"] \end{tikzcd}$$

図 3

このとき、イデアル I は次のようになる。

$$I = \langle \delta\gamma\beta\alpha, \varepsilon\delta\gamma\beta, \eta\varepsilon\delta\gamma, \theta\eta, \alpha\theta \rangle$$

また、各直規約射影加群 P_i は次のように組成列を並べて表現される。

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, P_6 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, P_7 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 大局次元と f−正規点、f−正規グラフ

多元環 A 上の有限次元直既約左加群 M の射影次元が d（$proj.\dim M = d$ と表す）であるとは、長さ d の最小射影列（minimal projective resolution）

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

が存在することである。無限に続く射影列しかできない場合は、射影次元が無限大である

といい、$proj.\dim M = \infty$ と表す。多元環 A の大局次元が d である（$gl.\dim A = d$ と表す）とは、A 上の有限次元直既約左加群の射影次元の最大値が d となることである。大局次元を計算するのには、すべての有限次元直既約左加群の射影次元を計算する代わりに単純加群の射影次元の最大値を求めればよい（Auslander, M.）。

例２

$A = kQ/I$ を例１と同じアドミッシブル列 $(4,4,4,4,3,2,2)$ を持つ単列環とする。各単純加群 S_i の最小射影列は次のようになり、S_2 の射影次元が最大で７であるから、A の大局次元は７である。

$$0 \to P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1 \to S_1 \to 0$$
$$0 \to P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1 \to P_7 \to P_6 \to P_3 \to P_2 \to S_2 \to 0$$
$$0 \to P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1 \to P_7 \to P_4 \to P_3 \to S_3 \to 0$$
$$0 \to P_5 \to P_4 \to S_4 \to 0$$
$$0 \to P_6 \to P_5 \to S_5 \to 0$$
$$0 \to P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1 \to P_7 \to P_6 \to S_6 \to 0$$
$$0 \to P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1 \to P_7 \to S_7 \to 0$$

単列環の大局次元の計算のため、Gustafson（1985）が導入した f−正規点（f-regular points）を用いる。有限個の点の集合 $U = \{1,2,\cdots,n\}$ 上の関数 f について、X をある正の整数 t に対して $f^t(i) = i$ となる $i \in U$ からなる U の部分集合とする。このとき、任意の $i \in U$ に対して $f^{n-1}(i) \in X$ となるので X は空でなく、f の定義域を X に制限したものは置換をなす。与えられたアドミッシブル列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して、$f(i) = i + a_i$ とおく。ただし、$i + a_i$ が n を超えるときは、必要なだけ n を減じて $1 \le f(i) \le n$ となるようにする。このとき上記で定義した集合 X の要素を f−正規点と呼ぶ。

定義３

アドミッシブル列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を持つ単列環 A に対応する f−正規グラフとは、点の集合を $\{1,2,\cdots,n\}$ とし、アドミッシブル列により定義された関数 f により点 i が点 j に写されるとき、すなわち $f(i) = j$ となるとき、$i \to j$ と矢を書いたものである。

例４

$A = kQ/I$ を例１と同じアドミッシブル列 $(4,4,4,4,3,2,2)$ を持つ単列環とする。A の f−正規グラフは次のようになる。

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 1 \arrow[r, bend left] & 5 \arrow[l, bend left] \\ & & & 4 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

図 4

f−正規グラフでは、各点を始点とする矢は 1 本に限る。この事実を定式化するために左単列グラフを定義する。

定義 5

左単列グラフは、唯一つのサイクルを持ち、そのサイクルから矢を取り除いたグラフはサイクル上の点を根とする非連結な木たちの和となるもの（図 5）である。

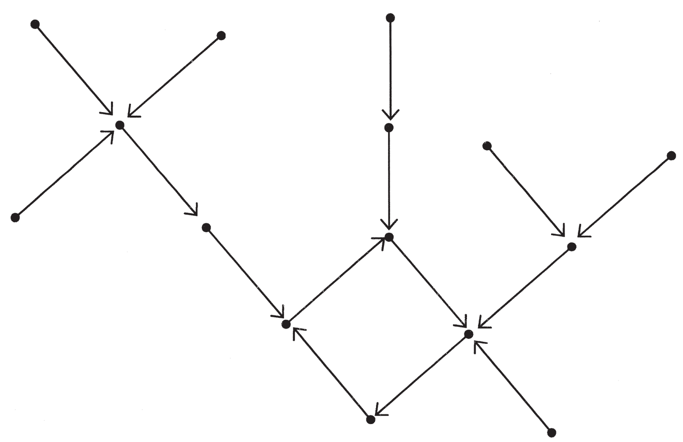

図 5

定理 6

単列環の f−正規グラフは、非連結な左単列グラフの和となる。

【証明】

f−正規グラフの定義により、各点を始点とする矢は多くとも 1 つである。矢を順にたどれば、サイクルに到達し取り込まれる。

注意 7

単列環の f−正規グラフのサイクル上にある点は、f−正規点である。

例 8

A をアドミッシブル列 $(3,3,3,2,2)$ を持つ単列環とする。A の f−正規グラフは図 6 のように 2 つの左単列グラフの非連結な和となる。f−正規点は、サイクル上にある $\{1,4,2,5\}$ の 4 点である。

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 1 \arrow[r, bend left] & 4 \arrow[l, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & 5 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

図 6

定理 9

大局次元が有限な単列環の f−正規グラフは、左単列グラフである（複数の左単列グラフの非連結な和とはならない）。

【証明】

f−正規グラフが高々 1 つのサイクルを持つことを示せば十分である。そこで、サイクルが 2 つあると仮定する。それらを $i_1 \to \cdots \to i_s \to i_1$ および $j_1 \to \cdots \to j_t \to j_1$ とおく。ただし、$i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ および、$j_1 < j_2 < \cdots < j_t$ である。これらはすべて f−正規点である。

一方、大局次元が有限であることから、f−正規点に対応する直既約射影加群の間の写像は 0 または同型であることがわかる。なぜならば、i, j を f−正規点とし、$P_i \to P_j$ を 0 でない非同型な写像とすると、

$$\cdots \to P_{f^2(i)} \to P_{f^2(j)} \to P_{f(i)} \to P_{f(j)} \to P_i \to P_j \to K \to 0$$

という $P_i \to P_j$ の余核（cokernel）となる加群 K に対する射影列が存在し、f が f−正規点たちの置換となることから、この射影列は無限の長さとなるからである。

$s=1$ ならば、$\ell(P_{j_1}) = n$ であるから、P_{j_1} と P_{i_1} の間に非同型な写像が存在する。$t=1$ のときも同様である。したがって、$s \neq 1$ かつ $t \neq 1$ である。このとき、ある u $(1 \le u \le s-1)$ に対して、$i_u < j_1 < i_{u+1}$ または、$i_s < j_1$ となるが、前者ならば P_{j_1} から P_{i_u} への非同型な写像が、後者ならば P_{j_1} から P_{i_s} への非同型な写像が存在する。これは矛盾である。

4. サイクル型単列環の長さと大局次元

加群 M の長さ $\ell(M)$ とは、M の組成列の長さである。多元環 A の長さ $\ell(A)$ は、直既約射影加群の組成列長さの最大値である。特に A がアドミッシブル列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を持つ単列環のとき、 $\ell(P_i) = a_i$ であり、 $\ell(A)$ は a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の最大値である。

以下、$A = kQ/I$ は、有限の大局次元を持つ連結なサイクル型の単列環とする。対応する

有向グラフは図 2 の形である。f−正規グラフは、左単列グラフとなり、特に唯一つのサイクルを持つ。f−正規グラフのサイクルに含まれる点（f−正規点）の個数によって分類し、環の長さと大局次元の上限について考察する。

4-1．f−正規点が 1 つの場合

長さが、$n+1 \le \ell(A) \le 2n-1$ のとき、筆者（2008）により完全に解決された。

定理 10

A をサイクル型の単列環で、$\ell(A)=n+t$（ただし、$1 \le t \le n-1$）とするとき、$gl.\dim A < \infty$ ならば $gl.\dim A \le 2n-2t$ である。特に $t=1$ ならば、$gl.\dim A \le 2n-2$ であり、これが有限な大局次元を持つ単列環の大局次元の上限である。

$\ell(A)=n$ のときは次が得られる。

定理 11

A をサイクル型の単列環で、$\ell(A)=n$ とするとき、$gl.\dim A < \infty$ ならば $gl.\dim A \le 2n-3$ となる。

まずは、等号が成立する例をあげる。

例 12

A をアドミッシブル列 $(n, n-1, n-1, \cdots, n-1)$ を持つ単列環（ただし、$n>2$）とする。f−正規グラフは、次のようになる。

$$n \to n-1 \to \cdots \to 2 \to 1 \circlearrowleft$$

図 7

このとき、次のように $proj.\dim S_{n-1} = 2n-3$ となり、これが最大の射影次元である。

$$0 \to P_2 \to P_1 \to P_3 \to P_2 \to \cdots P_{n-1} \to P_{n-2} \to P_n \to P_{n-1} \to S_{n-1} \to 0$$

したがって、$gl.\dim A = 2n-3$ である。

定理 11 の証明のため、f−正規点への距離の概念を導入する。$f^h(i)$ が f−正規点となる

最小の正の整数 h を点 i の $f-$正規点への距離と呼び、$h(i)$ と書く。点 i 自身が $f-$正規点の場合は、 $h(i)=0$ と置く。$f-$正規点への距離の上限は大局次元を次のようにコントロールする。

単純加群 S_i の最小射影列

$$\cdots \to P_{f^2(i+1)} \to P_{f^2(i)} \to P_{f(i+1)} \to P_{f(i)} \to P_{i+1} \to P_i \to S_i \to 0$$

について、S_i の射影次元が有限ならば、この列の左端は次のようになっている。

$$0 \to P_{f^k(i)} \to P_{f^{k-1}(i+1)} \to \cdots$$
$$0 \to P_{f^k(i+1)} \to P_{f^k(i)} \to \cdots$$

このとき、$f^{k+1}(i)=f^k(i+1)$ または $f^{k+1}(i)=f^{k+1}(i+1)$ であり、これらは $f-$正規点である。したがって、d を $h(i)$ の最大値とすれば、$proj.\dim S_i \le 2d$ となる。すなわち、$gl.\dim A \le 2d$ となる。

ここで、$f-$正規点への距離の上限と $f-$正規点の個数の関係を明らかにしておく。

補題 13

A をサイクル型の単列環とし、その $f-$正規点の個数を t とする。$gl.\dim A < \infty$ ならば $f-$正規点への距離の上限は、$n-t$ である。

【証明】

$f-$正規点ではない点の個数は $n-t$ 個であるから明らかに成立する。

サイクル型単列環 A のアドミッシブル列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ について、 $a_{i+1}=a_i-1$ となっているとき、i をステップ点と呼ぶ。ただし、$i=n$ のときは、$a_1=a_n-1$ となるとき、n をステップ点と呼ぶ。i がステップ点のとき、$f(i)=f(i+1)$ であるから、$f-$正規グラフは図 8 のグラフを部分グラフとして含む。ただし、$i=f(i)$ または $i+1=f(i)$ の場合を除外しない。

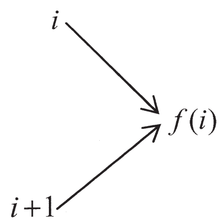

図 8

補題 14

A をサイクル型の単列環とし、その $f-$正規点の個数を t とする。A のアドミッシブル列が s 個のステップ点を含むとするとき、$gl.\dim A<\infty$ ならば $f-$正規点への距離の上限は、$n-t-s+1$ である。

【証明】

$f-$正規点への距離が d となる点を i とすれば、$f-$正規グラフは、

$$i\to f(i)\to f^2(i)\to\ldots f^d(i)$$

となるグラフを部分グラフとして含む。ここで、$f^d(i)$ 以外の d 個の点は $f-$正規点ではない。ところが、ステップ点のところでは、$f-$正規グラフが必ず分岐するので、このような部分木の長さの最大値は $n-t-s+1$ となる。

定理 11 の証明

A のアドミッシブル列を $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ とする。$a_1=n$ としても一般性を失わない。点 1 は $f-$正規点となる。$a_i=n$ となる点 i が他にあればそれも $f-$正規点となってしまうので仮定に矛盾する。したがって、$a_i\le n-1\,(2\le i\le n)$ である。特に、$a_2=n-1$ となる。補題 14 より、ステップ点が少ない方が $f-$正規点への距離の上限が大きくなるため、大局次元を最大にするためにはステップ点が 1 以外には存在しないようにする。このとき、アドミッシブル列は $(n,n-1,\cdots,n-1)$ となり、例 12 の単列環となる。$f-$正規点への距離の最大値は $n-1$ であり、大局次元はその 2 倍以下であるが、実際に計算すると、$gl.\dim A=2n-3$ となる。他のアドミッシブル列では、$f-$正規点への距離の最大値 d が $n-2$ 以下となるため、$gl.\dim A\le 2d=2n-4$ となる。

4-2. $f-$正規点が 2 つの場合

$\ell(A)<n$ の場合は、$f-$正規点が 2 以上となる。しかし、定理 9 より、大局次元が有限ならば、これら $f-$正規点は $f-$正規グラフにおいて同一のサイクル上になければならない。$f-$正規点が 2 個のとき、$f-$正規点への距離の上限は $n-2$ であるが、実際にこのようになる例をあげる。以下、点の個数を n、環の長さを ℓ、$f-$正規点への距離の最大値を d とおく。

例 15

$n=6,\ \ell=3,\ d=4$ のケース

A をアドミッシブル列 $(3,3,3,3,2,2)$ を持つ単列環とする。$f-$正規グラフは、次のようになる。

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 1 \arrow[r, bend right] & 4 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

図 9

このとき、$gl.\dim A = 7$ で、最大の射影次元を与える単純加群は S_2 であり、その最小射影列は次のようになる。

$$0 \to P_5 \to P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_6 \to P_5 \to P_3 \to P_2 \to S_2$$

例 16

$n = 5, \ell = 3, d = 3$ のケース

A をアドミッシブル列 $(3,2,2,2,2)$ を持つ単列環とする。$f-$正規グラフは、次のようになる。

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[r, bend right] & 1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

図 10

このとき、$gl.\dim A = 5$ で、最大の射影次元を与える単純加群は S_2 であり、その最小射影列は次のようになる。

$$0 \to P_2 \to P_1 \to P_5 \to P_4 \to P_3 \to P_2 \to S_2$$

定理 17

$n \geq 5$ で $\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil \leq \ell \leq n-1$ のとき、$gl.\dim A < \infty$ ならば、$gl.\dim A \leq 2n-5$ である。

ここで、実数 x に対して、x 以上の整数のうち最小の整数を $\lceil x \rceil$ と書く。

【証明】

補題 14 より、$f-$正規点への距離の最大値を d とおくと、$d = n-2$ である。これが実際に起こるのは、$\ell = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$ で、ステップ点が 1 個の時である。

（ケース 1）n が偶数のとき

アドミッシブル列 $(\ell,\ell,\cdots,\ell,\ell-1,\ell-1,\cdots,\ell-1)$ ― $\ell+1$ 個の ℓ の後に $\ell-1$ 個の $\ell-1$ が続いたもの―を持つ単列環のとき $d = n-2$ である。このとき、大局次元は $2n-5$ となる。最大の射影次元を与える単純加群は $S_{\ell-1}$ であり、その最小射影列は次のようになる。

$$0 \to P_{\ell+2} \to P_{\ell+1} \to \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to P_{\ell} \to P_{\ell-1} \to S_{\ell-1}$$

ここで、最後の 2 つの項の添字は、$\ell+2 = f^{n-3}(\ell), \ell+1 = f^{n-3}(\ell-1)$ であり、$f^{n-2}(\ell) = f^{n-2}(\ell-1) = 1$ となるためこの場所で射影列が終わる。

（ケース 2） n が奇数のとき

アドミッシブル列 $(\ell, \ell-1, \cdots, \ell-1)$ を持つ単列環のとき $d = n-2$ である。このとき大局次元は $2n-5$ となる。最大の射影次元を与える単純加群は $S_{\ell-1}$ である。

いずれのケースも大局次元は $2n-5$ となるのでこれが上限である。なぜならば、他のアドミッシブル列では $d < n-2$ となるので、$gl.\dim A \le 2d < 2n-4$ となるからである。

4-3. $f-$正規点が k 個（$k \ge 3$）の場合

$f-$正規点が k 個のとき、$f-$正規点への距離の上限は $n-k$ となるが、実際にこれが起きるためには、ステップ点が 1 個のみの場合である。

定理 18

$n \ge 2k+1$ で、$\left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil < \left\lceil \dfrac{n}{k-1} \right\rceil$ なる k に対して、$\ell = \left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ のとき、$gl.\dim A < \infty$ ならば、$gl.\dim A \le 2(n-k)-1$ である。等号が成立するときは、k 個の $f-$正規点を持つ。

【証明】

補題 14 より、$f-$正規点への距離の最大値を d とおくと、$d = n-k$ である。ステップ点が 1 個のときこれが起こる。

（$n = kl$ のとき）

アドミッシブル列 $(\ell, \ell, \cdots, \ell, \ell-1, \ell-1, \cdots, \ell-1)$ ―$(k-1)\ell+1$ 個の ℓ の後に $\ell-1$ 個の $\ell-1$ が続いたもの―を持つ単列環のとき $d = n-k$ である。このとき、最大の射影次元を与える単純加群は点 $\ell-1$ に対応するものであり、大局次元は $2(n-k)-1$ となる。

ステップ点が 2 個以上ある場合は、$d < n-k$ となり、大局次元は $2d$ 以下であるから、上限はやはり $2(n-k)-1$ となる。

（$n = k(l-1)+i$ $(i = 1, 2, \cdots k-1)$ のとき）

アドミッシブル列 $(\ell, \ell, \cdots, \ell, \ell-1, \ell-1, \cdots, \ell-1)$ ―$(k-1)\ell+1$ 個の ℓ の後に $(k-i+1)l-1$ 個の $\ell-1$ が続いたもの―を持つ単列環のとき $d = n-k$ である。このとき、最大の射影次元を与える単純加群は点 $\ell-1$ に対応するものであり、大局次元は $2(n-k)-1$ となる。同じ理由でこれが上限である。

定理 17 と定理 18 を合わせて次の定理を得る。

定理 19

$n \geq 2k+3$ で $\left\lceil \dfrac{n}{k+1} \right\rceil < \left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ のとき、長さ ℓ（$\left\lceil \dfrac{n}{k+1} \right\rceil \leq \ell < \left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$）のサイクル型の単列環の大局次元は有限ならば、$2n-2k-3$ 以下である。

定理の条件の $\left\lceil \dfrac{n}{k+1} \right\rceil < \left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ は必要である。$\left\lceil \dfrac{n}{k+1} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ となる場合は、必要なだけ k を小さくすることで、大局次元の上限が求められる。

例 20

$n=14, \ell=4, d=10$ のケース

A をアドミッシブル列 $(4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,3)$ を持つ単列環とする。$f-$正規グラフは、次のようになり 4 個の $f-$正規点を持つ。$\ell = \left\lceil \dfrac{14}{4} \right\rceil = 4$ である。

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & & & & & 12 \arrow[dr] & \\
4 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & 14 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 10 \arrow[r] & 13 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 9 \arrow[ur] & & 1 \arrow[dl] \\
 & & & & & & & & & & & 5 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

図 11

このとき、$gl.\dim A = 2\cdot(14-4)-1=19$ で、最大の射影次元を与える単純加群は S_3 であり、その最小射影列は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&0 \to P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1 \to P_{13} \to P_{12} \to P_{10} \to P_9 \to P_7 \to P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_{14} \\
&\to P_{13} \to P_{11} \to P_{10} \to P_8 \to P_7 \to P_4 \to P_3 \to S_3
\end{aligned}$$

5. n が小さい場合の長さと大局次元

直線型の単列環については、筆者（2008）により、長さ $\ell\,(2 \leq \ell \leq n)$ の直線型の単列環の大局次元は有限ならば $n-\ell+1$ 以下であることが示されている。これを用いて表 1 を得る。環はすべて連結なものを考える。

表 1

点の個数 n	環の長さ ℓ	大局次元の上限
2	2	1
3	2	2
3	3	1
4	2	3
4	3	2
4	4	1
5	2	4
5	3	3
5	4	2
5	5	1

サイクル型の場合は表 2 のようになる。

表 2

点の個数 n	環の長さ ℓ	大局次元の上限
3	3	3
3	4	4
3	5	2
4	3	4
4	4	5
4	5	6
4	6	4
4	7	2
5	3	5
5	4	4
5	5	7
5	6	8
5	7	6
5	8	4
5	9	2

参考文献

[1] Auslander, M., Reiten, I., and Smal ϕ , S. O., *Representation Theory of Artin Algebras,* Cambridge Univ. Press (1995).

[2] Drozd, Yu. A, Kirichenko, V. V., *Finite Dimensional Algebras,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1994).

[3] Gabriel, P., *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras,* Lecture Notes in Math., 831, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980) 1-71.

[4] Gustafson, William H., *Global Dimension in Serial Rings,* J. Algebra 97 (1985) 14-16.

［5］Ringel, C. M., *Tame algebras and integral quadratic forms,* Lecture Notes in Math., 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1984).

［6］植松盛夫．有限な大局次元を持つ単列環の長さと大局次元の上限の関係について．上武大学経営情報学部紀要 31（2008），p.45-59.

On the Relation of the Upper Bound of the Global Dimension and the Length of Serial Algebra of Cyclic Type Which Has Finite Global Dimension

UEMATSU Morio

Abstract

Let A be the finite dimensional serial algebra of cyclic type over an algebraically closed field which has finite global dimension, and let n be the number of the non isomorphic simple left modules of A.　Let k be a positive integer with $k < n/2$.　If the length of A is the minimal positive integer which greater than n/k , then the global dimension of A is less than or equal to $2n-2k-1$.

Key words and phrases

global dimension, serial algebra, admissible sequence, compositon length