上武大学ビジネス情報学部紀要
第８巻第１号（2009年12月）

〈論　文〉

中学生による証明問題の解決ストラテジーの特徴について

牧 野 智 彦
MAKINO Tomohiko

本研究の目的は、中学生による証明問題の解決ストラテジーの特徴を検討することである。一見証明問題の解決に成功していると見なされる中学３年生へのペーパーテストの解答を分析し、証明問題の解決ストラテジーの特徴を探った。

その結果、一見証明問題の解決に成功していると見なされる中学生は、自分の「わかりそうな部分」や「できそうな部分」から証明を行い、結論を導く決定条件も単一的かつ固定的に検討するという解決ストラテジーを用いていることがわかった。また、この結果から、証明コンピテンシーの中間領域の診断方法について論じる。

キーワード　　問題解決、証明コンピテンシー、認知的要因、ストラテジー、中学校

１．はじめに

中学生の証明の学習状況が望ましくないことは従来から指摘されている。国内における大規模調査からも、この指摘を裏付ける結果が明らかにされている（国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2003, 2006；文部科学省・国立教育政策研究所, 2007, 2008, 2009）。

従来から、証明問題をうまく解決できない要因を探る研究がなされてきている（Moore, 1994; Furinghetti & Morselli, 2004, 2007, 2009）。Furinghetti &

Morselliによって、証明問題をうまく解決できないのは、認知的要因だけでなく、情緒的（affective）要因も影響していることが明らかにされてきた。従来の研究の多くは、証明問題の解決に不成功であった生徒に着目し、彼らが持つ認知的要因と情緒的要因、そして、認知的要因と情緒的要因の連関についての研究に傾倒していた。しかし、証明問題を解決できない中学生だけに着目するのは不十分である。それは、証明に関する中学生の学習は、全くできないというよりは、むしろある程度のレベルまではできていて、証明問題を解決できたり、解決できなかったりと不安定な状態にあるからである。この意味で、証明に関して、多くの中学生の学習状況は、「グレーゾーン」、いわゆる中間領域にあり、多くの中学生が潜在的にこの領域に属し、ここから抜け出すことができない状況にあると思われる。

なお、中間領域にある証明学習の状況は、必ずしも証明の記述が途中で止まっているといった顕在化される場合だけではない。すなわち、ある証明問題に成功的な振る舞いを行う中学生が、問題によってはうまく解決ができなくなることがある。このタイプの生徒は、何らかの証明コンピテンシーに課題があると考えられる。そのため、このような生徒の学習は、問題によって証明問題が解決できたり、解決できなかったりを繰り返し、不安定な状態である。そして、このような状態では、後々の証明学習、例えば、高等学校における間接証明を構成するときには、証明を構成できなくなると思われる。その意味で、このタイプの生徒は、いわば不成功な証明者の予備軍といえるのである。ところが、中間領域にいる生徒に応じた証明の教授ストラテジーが確立されていないのが現状である。すなわち、中間領域にいる生徒に関する情報が収集、整理されていないのである。

２．目的と方法

証明問題に対して一見成功的な解答を示しているが、証明コンピテンシーにおいて「中間領域」に位置付くと思われる中学生の証明問題の解決ストラテジーを探ることを目的とする。

そのために、2つの三角形が合同であることから、合同な図形の性質を使って結論を導出するという、推論のステップ数に関して同じ構造を持つ問題を作成した。その問題を用いて中学３年生を対象にペーパー調査を実施した。最後に、収集されたデータを分類し、当該生徒の証明過程を分析し、その特徴を探った。

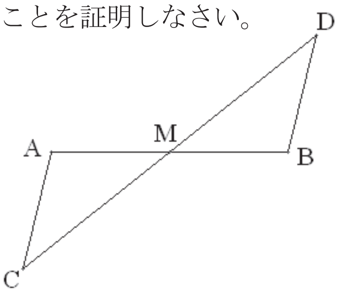
３．調査

（1）調査概要

本調査は茨城県の公立中学校3年生134名を対象に、平成21年7月14日、17日の2日間に実施した。調査実施に当たっては、Furinghetti & Morselli (2004) の方法に倣い、以下の問題を時間の影響を避けるために、生徒が必要とする十分な時間として各設問15分とした。

$\boxed{1}$　次の図のように、線分AB、線分CDはそれぞれ中点で交わっています。

このとき、線分ACと線分BDが平行であることを証明しなさい。



$\boxed{2}$　次の図で、AB=DC、∠ABC=∠DCBならば、△PBCが二等辺三角形となることを証明しなさい。

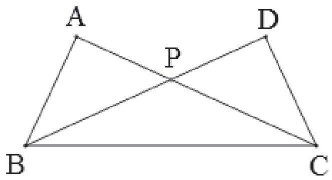


図1　調査問題

（2）調査結果

①設問1

設問1の正答率は25%（34名）で、誤答率は44%（59名）無解答率は31%（41名）であった。

誤答の中で、最も多かったのは、次の**図2**のような、三角形の合同条件までは正しく証明できているが、△AMC≡△BMDから結論「AC//BD」を直接導出していた解答で18%（24名）であった。これを解答類型2とした。

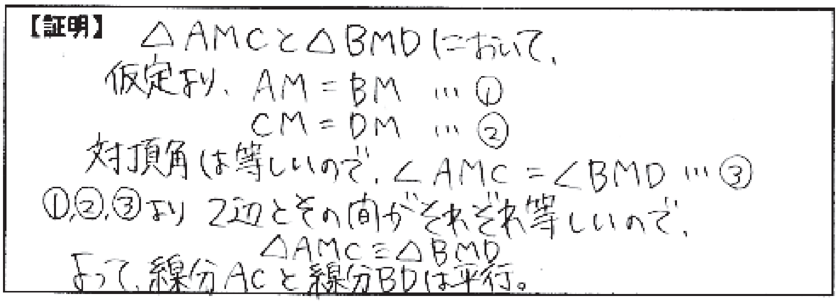

【証明】△AMCと△BMDにおいて、
仮定より、AM＝BM …①
CM＝DM …②
対頂角は等しいので、∠AMC＝∠BMD …③
①,②,③より 2辺とその間がそれぞれ等しいので、
△AMC≡△BMD
よって、線分ACと線分BDは平行。

図２　設問１で最も多かった誤答例（33 3年 女子）

次に、三角形の合同条件までは正しく証明できているが、類型２以外で、△AMC≡△BMDから結論「AC//BD」を導出する推論に誤りがある解答が6％（８名）であった。これを解答類型３とした。そして、解答類型２、３と同様に、三角形の合同条件までは正しく証明できているが、その後結論「AC//BD」まで至らなかった解答が4％（６名）であった。これを解答類型４とした。

その他、証明を全く記述していないが問題の条件を所与の図に書き込んでいる解答は2％（３名）で、これを解答類型５とした。また、問題の条件だけを記述している解答が2％（３名）で、これを解答類型６とした。そして、正しいと認められない性質を証明に使っている解答が2％（２名）で、これを解答類型７とした。最後に、これら以外の解答を上解答類型９とした。上記以外の解答は10％（13名）であった。

以上をまとめると、次の**表１**のとおりである。

表１　設問１の解答類型別割合

類型			人数	割合
1	正　答		34	25%
2	合同まで証明できている	結論を直接導出	24	18%
3		結論への誤推論	8	6%
4		結論へ未到達	6	4%
5	証明を記述せず図に記入		3	2%
6	問題条件だけ記述		3	2%
7	認められていない性質の使用		2	2%
9	上記以外の解答		13	10%
0	無解答		41	31%
合計			134	100%

また、**表1**より、△AMC≡△BMDまで正しく導くことができた生徒は72名で、全体の53%に及んでいた。

②設問2

設問2の正答率は16%(21名)で、誤答率は56%(75名)、無解答率は28%(38名)であった。そして、三角形の合同条件までは正しく証明できているが、△AMC≡△BMDから結論「AC//BD」を直接導出していた解答類型2は3%(4名)であった。

また、**図3**のように、三角形の合同条件までは正しく証明できているが、△ABC≡△DCBと結論「△PBCが二等辺三角形」をつなぐ推論に誤りがあるなどの解答類型3が26%(35名)と、設問2の誤答の中で最も多かった。

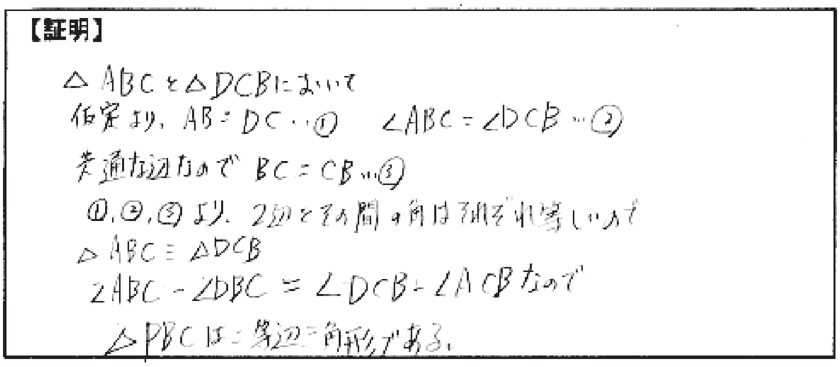

【証明】
△ABCと△DCBにおいて
仮定より、AB=DC…①　∠ABC=∠DCB…②
共通な辺なので BC=CB…③
①,②,③より、2辺とその間の角はそれぞれ等しいので
△ABC≡△DCB
∠ABC−∠DBC=∠DCB−∠ACBなので
△PBCは二等辺三角形である。

図3　設問2で最も多かった誤答例（37　3年　女子）

そして、設問1に倣い、**表2**のように設問2の解答類型をまとめた。

表2　設問2の解答類型別割合

類型			人数	割合
1	正　答		21	16%
2	合同まで証明できている	結論を直接導出	4	3%
3		結論への誤推論	35	26%
4		結論へ未到達	5	4%
5	証明を記述せず図に記入		8	6%
6	問題条件だけ記述		7	5%
7	認められていない性質の使用		2	1%
9	上記以外の解答		14	11%
0	無解答		38	28%
合計			134	100%

また、**表２**より、△ABC≡△DCBまで証明できた生徒は65名で、全体の48％であった。

③設問１と設問２のクロス集計

一方の設問では正答しているが、他方で誤答になっている生徒の割合を調べるため、クロス集計を行った。その結果が**表３**である。

表３　各設問の正誤のクロス集計

設問1 ＼ 設問2	正答	誤答	合計
正答	15名（11%）	5名（4%）	20名（15%）
誤答	19名（14%）	95名（71%）	113名（85%）
合計	34名（25%）	100名（75%）	134名（100%）

上記の**表３**より、設問１と設問２の両設問に正答したのは11％（15名）であった。設問１に正答した34名の中で、設問２で誤答になったのは19名であった（網掛部）。

次の**表４**に示す通り、誤答の内訳は、解答類型３は14名、解答類型４が３名、解答類型７が１名、解答類型０が１名であった。

表４　設問１の正答者による設問２の誤答の内訳

設問２（解答類型）	人数
3	14
4	3
7	1
0	1

他方、設問２に正答している20名の中で、設問１に誤答していたのは５名であった（網掛部）。次頁の**表５**のように、誤答の内訳は解答類型０が２名、解答類型３が１名、そして解答類型４が２名であった。

なお、**表３**の網掛部の人数の違いの理由については、４（３）で述べる。

表5　設問2の正答者による設問1の誤答の内訳

設問1（解答類型）	人数
3	1
4	2
0	2

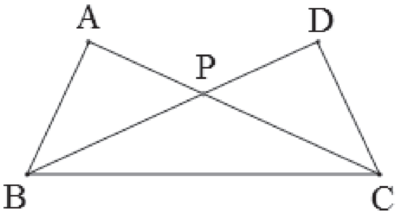
４．分析

本調査の目的は、証明に関して成功していると見なされる中学生による証明過程のパターンを見出すことである。そこで、分析対象は、設問1で正答しているが設問2では誤答になっている生徒19名と、設問2で正答しているが設問1で誤答になっている生徒5名の計24名の解答とした。ただし、両設問で正答した15名の中にも、証明コンピンテシーに課題を抱えている生徒が含まれていることは容易に想定される。しかし、現段階で収集されているデータからは分析が困難なため、今回は分析の対象から外した。

(1) 合同に関する証明問題の成功的解決

分析対象の24名のうち22名は、誤答となったいずれかの設問において、二つの三角形が合同であることまでは正しく証明できていた。残りの2名は両者とも設問2に正答していたが、設問1で無解答であった。そのうちの1名(57　3年女子)は証明を消した跡が残っていた。その証明を記述した形跡をみると、△ACM≡△BDMまで書かれていた。同様に、残りの1名(31　3年女子)も、何らかの理由で証明を記述していないが、おそらく設問1で△ACM≡△BDMまでは証明できていたと考えられる。つまり、分析対象である24名全員が、両設問で二つの三角形が合同であることまでは証明できていたといえる。したがって、これら24名は、例えば、次のような二つの三角形、△ABCと△DCBの合同を証明する問題では、成功的なパフォーマンスを示すと考えられる。しかし、逆に、二つの三角形の合同を証明する単純な問題では、不十分な証明コンピテンシーを持つ生徒を見過ごす可能性を含んでいる。

右の図で、AB=DC、∠ABC=∠DCB のとき、△ABC と△DCB が合同であることを証明しなさい。



（2）合同の証明への無計画な取組み

設問１で正答していたが設問２で誤答になっている19名は、設問２で△ABCと△DCBが合同であることを示した後、「△ABC≡△DCB」と「△PBCが二等辺三角形である」ことを論理的に繋げることができなかった。特に、19名の誤答の中では、解答類型３「合同までは証明できているが結論を導出する推論に誤りがある」が14名と最も多かった。また、設問２の誤答の中でも、解答類型３は35名（26％）と一番多かった。

これは、当該生徒が「△ABC≡△DCB」を示すことに必然性を持たず、無計画に三角形の合同を証明していることを示唆している。つまり、結論である「△PBCが二等辺三角形である」ことを導くために、△ABCと△DCBの合同を示したわけではないのである。当該中学生は、問題の所与の条件から、△ABC≡△DCBを証明できそうだと判断し、△ABCと△DCBが合同であることを証明したにすぎないのである。

よって、△ABC≡△DCBを証明した後に、「△PBCが二等辺三角形である」とどのように繋げるかを検討したと思われる。そのため、「△ABC≡△DCB」と「△PBCが二等辺三角形である」を繋ぐ推論がうまく見つかれば証明が成功することになる。その一方で、これらを繋げる推論が見出せなければ、二つの三角形が合同であることの証明で停止するか、解答類型３のように誤った推論で強引に結論付けるか、あるいは、証明を記述すらしないかのいずれかのタイプの解答が生成されると考えられる。

（3）結論を導く決定条件の数

設問１が正答で設問２が誤答であった生徒数は19名で、一方、設問１が誤答で設問２が正答であった生徒数は５名であった。これらの人数の違いは、与えられた問題の構造の影響があると考えられる。

例えば、設問１で、△ACM≡△BDMを論拠に用いる場合、結論「AC//BD」を導く決定条件は、∠ACM=∠BDMの「錯角が等しい」となる。また、四角形ACBDに着目する場合、「四角形ACBDが平行四辺形である」ことが、結論「AC//BD」を導く決定条件となる。つまり、設問１の構造は、証明の方針としては二つあるが、結論「AC//BD」を導く

決定条件の数はいずれの場合も一つという特徴がある。

一方、設問2の場合、証明の方針は△ABC≡△DCBを示し、合同な図形の性質を利用するといった場合の一つだが、結論「△PBCが二等辺三角形である」ことを導く決定条件は、PB=PCの「二辺が等しい」か、∠PBC=∠PCBの「底角が等しい」の二つである。この点が設問1と問題の構造が異なる。

さらに、両設問とも、三角形の合同条件を用いた証明の場合、推論のステップの数は同じであった。両設問とも、二つの三角形の合同を示し、合同な図形の性質をもとに、結論を導くという証明の構造になっている。

したがって、設問1の方が、設問2の方よりも正答率が高く、設問1は正答しつつも設問2で誤答になった生徒の人数の方が、設問2で正答し設問1で誤答になった生徒の人数よりも多くなっている要因の一つに、設問1と設問2における、結論を導く決定条件の数の違いがあると考えられる。この点で、両設問は質的に異なる問題と言える。

5．考察

証明に成功していると見なされる中学生の中には、証明コンピテンシーが不十分な生徒が含まれている。4(2)から、中学生は、合同になりそうな三角形があれば、あるいは、所与の問題の条件から合同であることを証明できそうであれば、とりあえず、その二つの三角形の合同を証明する。よって、二つの三角形が合同であることを証明した後になって初めて、どのように結論と繋げるかという検討に取り掛かるのである。

証明に成功していると見なされる中学生の中には、無計画に証明に取り組んでいる生徒がいる。大切なことは、無計画に取り組むのではなく、所与の問題の条件と結論との関係から、二つの三角形が合同であることを証明する必然性を把握した上で、その証明に取り掛かる習慣を確立できるようにすることである。それは、証明問題は合同に関する問題や合同を適用する問題だけではないからである。問題の内容に依存した解決ストラテジーは一般性がないため、その適用範囲が狭く、ほとんど役に立たない。むしろ、そのストラテジーに固執することで、障害になる可能性もある。

一方、4(1)で、分析対象の24名すべてが、合同に関する証明に正答しているとした。この分析から、24名の生徒は、合同を証明することに自信を持っていることが窺える。この点から、とにかく合同から証明するという無計画な取り組みには、彼らなりの意味があると思われる。つまり、この24名は、問題を解決するに当たって、「自信のあること」、

「できること」から取り掛かっていると思われる。そして、「自信のあること」、「できること」、あるいは、「わかること」に取り組み、一つ一つ部品を積み上げていくように、「できること」、「わかること」を積み上げて証明を構成するという特徴的な解決ストラテジーを適用している。そのため、証明問題によっては成功するときもあれば、失敗するときもあり、その意味で、不安定な解決ストラテジーと言わざるを得ないのである。

このように、証明問題に関して成功的な解決者が、証明の全体像を描き、それを把握してから取り組むという解決ストラテジーを習得し、適用しているとは限らないのである。

次に、4(3)で、結論を導く決定条件の数が問題の正答率に影響を与えると分析した。これは、中学生の証明問題の解決ストラテジーには、一つの証明の方針に沿って取り組んだ際に、その方針ではうまくいかないことに気付いても、方針を変更しないという特徴があること示している。その結果、解答類型３に見られるように、強引に結論と結びつけるのである。例えば、設問２で結論「△PBCが二等辺三角形である」を導くための決定条件として辺に関する「PB=PC」を選択した生徒は、「△ABC≡△DCB」から合同な図形の性質に基づいて「PB=PC」を導出し、結論を導いた。

本来、証明の構成過程には、証明の構成要素を「仮想的(hypothetical)」に選択／テストする推論が含まれる(Heinze et al, 2008)。すなわち、結論を導く決定条件は仮想的に選択／テストされるのである。したがって、方針は変更し得るものと捉え、最初に選択した方針に固執することなく、必要があれば柔軟に変更できなければならない。しかし、中学生は、証明の問題解決において、結論を導く決定条件を単一的かつ固定的に捉え、最初から一つの決定条件に絞り、他は検討しないという特徴的な解決ストラテジーを適用している。この解決ストラテジーは、成功するときもあれば、不成功のときもあり、解決ストラテジーとしては不安定と言わざるを得ないのである。

４における分析から、証明コンピテンシーが中間領域にある生徒の解決ストラテジーの特徴以外に、診断方法の視点が明らかになる。

まず、4(3)の分析から、推論のステップの数が関連する「証明の構造」ではなく、「問題の構造」、すなわち結論を導く決定条件の数に着目し、その点を操作することで、証明コンピテンシーが中間領域に留まっているかどうかを診断することができると考える。具体的には、ある四角形が「平行四辺形」であることを証明する問題が考えられる。それは、中学校２年で学習する「平行四辺形」の決定条件(定義も含む)は、次のように五つあるからである。

四角形は、次の各場合に平行四辺形である。

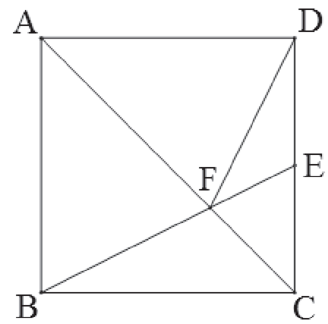
① 2組の向かいあう辺が、それぞれ平行であるとき（定義）
② 2組の向かいあう辺が、それぞれ等しいとき
③ 2組の向かいあう角が、それぞれ等しいとき
④ 対角線が、それぞれ中点で交わるとき
⑤ 1組の向かいあう辺が、等しくて平行であるとき

これらの五つで、結論「平行四辺形である」を導くのに、いつも決定条件として平行四辺形の定義を選択し、強引に結論付ける生徒は、証明コンピテンシーが中間領域に留まっていると診断できる。

次に、4(1)から、分析対象とした生徒24名は合同に関する証明には習熟していると見なすことができる。したがって、単純に、二つの三角形が合同であることを証明する問題では、彼らの証明コンピテンシーの状態を診断することができない。したがって、少なくとも、合同に関する証明ではなく、例えば、設問2のような、合同を適用する問題、さらには、合同であることと別の数学的性質とを組み合わせて、新たな数学的性質を導き出すような問題に取組ませることによって、証明コンピテンシーの中間領域にいる生徒を診断できると思われる。例えば、次のような問題が考えられる。

正方形ABCDがある。図のように、辺CDの中点をE、線分BEと対角線ACとの交点をFとする。

このとき、∠ADF＝∠CEFとなることを証明しなさい。



この問題は、合同に関する証明である「△ABF≡△ADF」と、合同な図形の性質である「∠ABF=∠ADF」と、平行線の性質「∠ABF=∠CEF」(錯角が等しい)とを組み合わせて、∠ADF=∠CEFを導くという構造になっている。このような問題に直接取り組ませるのが困難な場合は、「合同を示す問題」と「錯角が等しいことを示す問題」に分けて、その後、それを組み合わせることで、「どんな性質が導けるか」や、それら二つのことと、「∠ADF=∠CEF」とを結び付けられるかどうかを問題にすることも考えられる。

6．おわりに

本稿は、ある証明問題では成功的なパフォーマンスを見せている中学生でも、実は証明コンピテンシーとしては中間領域に位置付き、不十分な解決ストラテジーを適用しているのではないかと考え、彼らの持つ特徴的な解決ストラテジーを探った。

その結果、当該中学生は、「わかりそうな部分」や「できそうな部分」から取り掛かることや、結論を導く決定条件を単一的かつ固定的に検討するという特徴的な解決ストラテジーを適用していることがわかった。

今後は、分析対象とした24名に対してインタビュー調査を実施し、解決ストラテジーの特徴について同定するとともに、今回の調査で設問1と設問2の両方で正答した生徒に対して発話思考法やそれを補うためのインタビュー調査を実施し、なぜ彼らが正答したのかを明らかにするために、彼らの解決ストラテジーと24名の解決ストラテジーを比較し、両方の設問に正答した生徒の解決ストラテジーの特質を解明することが課題である。

7．引用・参考文献

Furinghetti, F. & Morselli, F.（2004）. Between affect and cognition: proving at university level. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 369-376.

Furinghetti, F. & Morselli, F.（2007）. For whom the frog jumps: the case of a good problem solver. *For the Learning of Mathematics*, 27, 2, pp. 22-27.

Furinghetti, F. & Morselli, F.（2009）. Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, 70, pp. 71-90.

Heinze, A, Cheng, Y-H, Ufer, S., Lin, F-L, Reiss, K.（2008）. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 3, pp. 443-453.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2003）. 平成13年度教育課程実施状況調査報告書中学校数学, 国立教育政策研究所教育課程研究センター.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2006）. 特定の課題に関する調査(算数・数学)調査結果(小学校・中学校), 国立教育政策研究所教育課程研究センター.

文部科学省・国立教育政策研究所(2007). 平成19年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要.

文部科学省・国立教育政策研究所(2008). 平成20年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要.

文部科学省・国立教育政策研究所(2009). 平成21年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要.

Moore, R. C.（1994）. Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 3, pp. 249-266.